13. Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

13.1 Ορισμοί

Μια εξίσωση που περιέχει παραγώγους κάποιας συνάρτησης, ονομάζεται *διαφορική εξίσωση* (Δ.Ε.). Αν η συνάρτηση της οποίας οι παράγωγοι εμφανίζονται στην εξίσωση είναι συνάρτηση μιας ανεξάρτητης μεταβλητής, η εξίσωση ονομάζεται *συνήθης διαφορική εξίσωση* (Σ.Δ.Ε.). Γενικά, οποιαδήποτε συνάρτηση των x και y και των παραγώγων τής y ως προς x

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ...\right) = 0 \tag{13.1}$$

ορίζει μια συνήθη διαφορική εξίσωση για το y συναρτήσει του x. Μερικά παραδείγματα:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = F, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -a^2x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by + c = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + k\sin\omega t = 0, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)^{3/2} + y^3 = f(x)$$

Οποιαδήποτε συνάρτηση ικανοποιεί μια Δ.Ε., ονομάζεται *λύση* της Δ.Ε. Μια συνάρτηση η οποία εμπεριέχει όλες τις δυνατές λύσεις μιας Δ.Ε. ονομάζεται *γενική λύση* της Δ.Ε.

Στη διατύπωση των διαφορικών εξισώσεων χρησιμοποιούνται διάφορα σύμβολα, όπως:

οι τελεστές $\dfrac{d}{dx}$ και $D \equiv \dfrac{d}{dx}$ για την πράξη της παραγώγισης (ως προς x εδώ),

τα σύμβολα $y'(x)$ και $\dfrac{dy}{dx}$ για την πρώτη παράγωγο του $y(x)$ ως προς το x,

$y''(x)$ και $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ για τη δεύτερη παράγωγο, κ.ο.κ.

ο συμβολισμός του Νεύτωνα, σύμφωνα με τον οποίο μια τελεία πάνω από ένα σύμβολο σημαίνει παραγώγιση ως προς το χρόνο t: $\dot{x} \equiv \dfrac{dx}{dt}$, $\ddot{x} \equiv \dfrac{d^2x}{dt^2}$.

Η τάξη της παραγώγου μεγαλύτερης τάξης που εμφανίζεται στη διαφορική εξίσωση, ονομάζεται *τάξη της διαφορικής εξίσωσης*. Όταν η διαφορική εξίσωση εκφραστεί στη μορφή πολυωνύμου, η δύναμη στην οποία εμφανίζεται η μεγαλύτερης τάξης παράγωγος ονομάζεται *βαθμός* της διαφορικής εξίσωσης. Μια Σ.Δ.Ε. για την $y(x)$ ονομάζεται *γραμμική*, αν είναι γραμμική ως προς την $y(x)$ και τις παραγώγους της.

Για παράδειγμα:

Η $m\dfrac{d\upsilon}{dt} = F$ είναι μια γραμμική Σ.Δ.Ε. πρώτης τάξης και πρώτου βαθμού.

Οι $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -a^2x$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a\dfrac{dy}{dx} + by + c = 0$ και $\dfrac{d^2y}{dt^2} + k\sin\omega t = 0$ είναι δεύτερης τάξης και πρώτου βαθμού. Και οι τρεις είναι γραμμικές.

Η $\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^{3/2} + y^3 = f(x)$ είναι μια Σ.Δ.Ε. εξίσωση πρώτης τάξης. Είναι τρίτου βαθμού, αφού μπορεί να γραφτεί ως $\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^3 = \left(f(x) - y^3\right)^2$. Η μη γραμμικότητά της οφείλεται στον όρο $\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^3$, και στις δυνάμεις του y.

13.2 Η παραγωγή συνήθων διαφορικών εξισώσεων

Έστω ότι η συνάρτηση $y(x)$ περιέχει n παραμέτρους. Με n διαδοχικές παραγωγίσεις της αποκτούμε $n+1$ εξισώσεις. Αν χρησιμοποιήσουμε αυτές τις εξισώσεις για να απαλείψουμε τις παραμέτρους, βρίσκουμε μια σχέση που περιέχει τις $y(x)$, $y'(x),\ldots,$ $y^{(n)}(x)$ και τη μεταβλητή x. Αποκτούμε δηλαδή μια συνήθη διαφορική εξίσωση n-οστής τάξης για την $y(x)$.
Παραδείγματα:

Αν $y^2 = 4a(x+a)$ ($a=$ σταθερά), παραγωγίζοντας βρίσκουμε ότι $2y\dfrac{dy}{dx} = 4a$.

Απαλείφοντας την a από τις δύο αυτές εξισώσεις, βρίσκουμε τη μη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης,

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0 \ .$$

Με τον ίδιο τρόπο, αν $y = A\sin\omega t + B\cos\omega t$, θα είναι

$$\frac{dy}{dt} = A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t \qquad \text{και} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2\sin\omega t - B\omega^2\cos\omega t \ .$$

Η πρώτη και η τρίτη εξίσωση δίνουν τη γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης:

$\dfrac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$, γνωστή ως η εξίσωση του μονοδιάστατου απλού αρμονικού ταλαντωτή χωρίς απόσβεση ή εξωτερική διέγερση.

Η $y = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ λέγεται ότι είναι *η γενική λύση* της Σ.Δ.Ε. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$.

Αποδεικνύεται ότι

Για να είναι μια λύση η γενική λύση μιας Σ.Δ.Ε. n-οστής τάξης,
πρέπει να περιέχει n ανεξάρτητες αυθαίρετες σταθερές.

Οι λύσεις διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν φυσικά προβλήματα πρέπει να ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες. Αν οι συνθήκες αφορούν τις τιμές της άγνωστης συνάρτησης και των παραγώγων της σε ένα μόνο σημείο (μία τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής), οι συνθήκες είναι γνωστές ως *αρχικές συνθήκες* και το πρόβλημα ονομάζεται *πρόβλημα αρχικών τιμών*. Αν οι συνθήκες αφορούν τις τιμές της άγνωστης συνάρτησης και των παραγώγων της σε περισσότερα του ενός σημεία, οι συνθήκες είναι γνωστές ως *συνοριακές συνθήκες* και το πρόβλημα ονομάζεται *πρόβλημα συνοριακών τιμών*. Η ικανοποίηση αυτών των συνθηκών, καθορίζει τις τιμές των αυθαίρετων σταθερών, και ξεχωρίζει από τις άπειρες λύσεις που περιγράφει η γενική λύση τη μία λύση η οποία ισχύει για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Θα εξετάσουμε παρακάτω μερικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις οι οποίες είναι σημαντικές στην περιγραφή φυσικών συστημάτων. Λόγω του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα, πολλές από τις διαφορικές εξισώσεις που συναντά κανείς στη Μηχανική είναι πρώτης ή δεύτερης τάξης. Το ίδιο ισχύει και για προβλήματα που αναφέρονται σε ταλαντώσεις μηχανικών και ηλεκτρικών συστημάτων. Σε πολύπλοκα συστήματα (με πολλούς βαθμούς ελευθερίας) εμφανίζονται συστήματα διαφορικών εξισώσεων.

Για μια πληρέστερη μελέτη του θέματος των διαφορικών εξισώσεων ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευθεί, μεταξύ πολλών άλλων, και ένα από τα συγγράμματα που δίνονται στη βιβλιογραφία.

13.3 Διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών

Μια Δ.Ε. η οποία μπορεί να αναχθεί στη *διαφορική μορφή* $g(y)\,dy = f(x)\,dx$, ονομάζεται διαφορική εξίσωση *χωριζόμενων μεταβλητών* και μπορεί να λυθεί με απλή ολοκλήρωση των δύο μελών:

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + c \tag{13.2}$$

όπου η c είναι μια κοινή σταθερά ολοκλήρωσης για τα δύο ολοκληρώματα. Οι εξισώσεις αυτές εξετάστηκαν στο Κεφάλαιο 9.

13.4 Η γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, με σταθερούς συντελεστές

Στις ενότητες που ακολουθούν, θα θεωρήσουμε το χρόνο t ως ανεξάρτητη μεταβλητή, και την y συνάρτηση του t. Η *γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές* έχει τη γενική μορφή

$$y'' + p_1 y' + p_0 y = f(t) \tag{13.3}$$

όπου οι p_0, p_1 είναι σταθεροί συντελεστές.

Αν $f(t) = 0$, η εξίσωση ονομάζεται *ομογενής*. Ο γενικός τρόπος λύσης της εξίσωσης

$$y'' + p_1 y' + p_0 y = 0 \tag{13.4}$$

είναι να υποτεθεί η μορφή $y = e^{st}$ για τις λύσεις και να αντικατασταθεί στη διαφορική εξίσωση. Αποκτάται έτσι μια αλγεβρική εξίσωση, η *χαρακτηριστική εξίσωση*, οι λύσεις της οποίας δίνουν τις τιμές s_i του s για τις οποίες οι συναρτήσεις $y_i = e^{s_i t}$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης.

Η λύση της μη ομογενούς εξίσωσης βασίζεται στη συμπλήρωση της γενικής λύσης της ομογενούς εξίσωσης.

Θα εξετάσουμε τις λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές, αρχίζοντας από την πιο απλή μορφή της ομογενούς εξίσωσης και συνεχίζοντας με πιο πολύπλοκες μορφές.

13.4.1 Η εξίσωση $y'' + p_0 y = 0$

Αν υποθέσουμε λύσεις της μορφής $y = e^{st}$ έχουμε $y' = s e^{st}$ και $y'' = s^2 e^{st}$.

Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση έχουμε $s^2 e^{st} + p_0 e^{st} = 0$ και απλοποιώντας τον κοινό παράγοντα e^{st}, βρίσκουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$s^2 + p_0 = 0, \quad \text{της οποίας λύσεις είναι οι} \quad s_1 = -\sqrt{-p_0} \quad \text{και} \quad s_1 = \sqrt{-p_0}\ .$$

Έχουμε λοιπόν δύο λύσεις της διαφορικής εξίσωσης, τις $y_1 = e^{-\sqrt{-p_0}\,t}$ και $y_1 = e^{\sqrt{-p_0}\,t}$.

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι ο γραμμικός συνδυασμός των δύο λύσεων,

$$y(t) = c_1\, e^{-\sqrt{-p_0}\,t} + c_2\, e^{\sqrt{-p_0}\,t}\ . \tag{13.5}$$

Η λύση έχει δύο ανεξάρτητες αυθαίρετες σταθερές και είναι η γενική λύση της δοθείσας διαφορικής εξίσωσης.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η περίπτωση θετικού p_0. Η εξίσωση αυτή συναντάται συχνά ως η διαφορική εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή χωρίς απόσβεση ή εξωτερική διέγερση (σύστημα μάζας-ελατηρίου, ταλαντώσεις μικρού πλάτους του απλού ή φυσικού εκκρεμούς, ταλαντώσεις ηλεκτρικού κυκλώματος LC, κλπ.). Η εξίσωση γράφεται ως

$$y'' + \omega^2 y = 0, \qquad \omega = \text{σταθ.} \tag{13.6}$$

Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $y = e^{st}$, βρίσκουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$s^2 + \omega^2 = 0 \quad \text{της οποίας λύσεις είναι οι} \quad s_1 = -i\omega \quad \text{και} \quad s_2 = i\omega\ . \tag{13.7}$$

Οι αποδεκτές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης, που αντιστοιχούν στις δύο αυτές τιμές της s, είναι οι

$$y_1 = e^{-i\omega t} \quad \text{και} \quad y_2 = e^{i\omega t}. \tag{13.8}$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι ο γραμμικός συνδυασμός των δύο λύσεων,

$$y(t) = c_1 e^{-i\omega t} + c_2 e^{i\omega t} \ . \tag{13.9}$$

Η λύση μπορεί να γραφτεί σε πραγματική μορφή κάνοντας χρήση του τύπου του Όιλερ,

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i \sin\omega t \qquad \text{και} \qquad e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin\omega t$$

οπότε έχουμε $y(t) = (c_1 + ic_2)\cos\omega t + (c_2 - ic_1)\sin\omega t$, ή

$$y(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t, \qquad A,\ B = \text{σταθ.} \tag{13.10}$$

Μια άλλη μορφή αυτής της εξίσωσης μπορεί να βρεθεί ως εξής: γράφοντας,

$$y(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega t\right) \tag{13.11}$$

και ορίζοντας το *πλάτος* $a \equiv \sqrt{A^2+B^2}$ και τη *σταθερά φάσης* ϕ έτσι ώστε

$$\sin\phi \equiv \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \cos\phi \equiv \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \tan\phi \equiv \frac{B}{A} \tag{13.12}$$

έχουμε $y(t) = a\,(\cos\phi\sin\omega t + \cos\phi\sin\omega t)$, και τελικά

$$y(t) = a\sin(\omega t + \phi) \tag{13.13}$$

για τη λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Οι σταθερές $A,\ B$, ή οι $a,\ \phi$, μπορούν να προσδιοριστούν για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα από τις αρχικές ή άλλες συνθήκες του προβλήματος. Στο Παράδειγμα που ακολουθεί αυτό γίνεται σαφές.

Παράδειγμα 3

Μια μάζα M , συνδεδεμένη στο άκρο ενός ελατηρίου σταθεράς k , εκτελεί ταλαντώσεις χωρίς απώλειες. Να βρεθεί η κίνηση της μάζας, αν αρχικά $(t=0)$ η μετατόπιση της μάζας ήταν $x(0)=0$ και η ταχύτητά της $\upsilon(0)=\upsilon_0$.

Η εξίσωση κίνησης της μάζας είναι

$$Mx'' = -kx\,, \qquad x'' + \omega_0^2\, x = 0, \qquad \omega_0 = \sqrt{k/M}$$

και η γενική της λύση (μετατόπιση): $x(t) = A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t$.

Η ταχύτητα της μάζας είναι: $\upsilon(t) = \dfrac{dx}{dt} = A\omega_0\cos\omega_0 t - B\omega_0\sin\omega_0 t$.

Θέτοντας $t=0$, και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες, βρίσκουμε:

$$x(0) = B = 0 \quad \text{και} \quad \upsilon(0) = A\omega_0 = \upsilon_0\ .$$

Επομένως, η $\quad x(t) = \dfrac{\upsilon_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$

είναι η λύση που ικανοποιεί τις δεδομένες αρχικές συνθήκες.

13.4.2 Η εξίσωση $y'' + p_1 y' + p_0 y = 0$

Η διαφορική εξίσωση $y'' + p_1 y' + p_0 y = 0$ έχει τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$s^2 + p_1 s + p_0 = 0 \ . \qquad (13.14)$$

Η εξίσωση αυτή έχει δύο ρίζες, τις s_1 και s_2, και γενική λύση την

$$y(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \qquad (13.15)$$

αν οι δύο ρίζες είναι διαφορετικές.

Αν οι συντελεστές p_0 και p_1 είναι τέτοιοι ώστε οι δύο ρίζες να είναι ίσες, $s_1 = s_2 = s$, η γενική λύση είναι

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{st} \qquad (13.16)$$

όπως μπορούμε να επιβεβαιώσουμε με αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση.

Θα μελετήσουμε τη διαφορική αυτή εξίσωση στο παράδειγμα που ακολουθεί, με αναφορά στον αρμονικό ταλαντωτή με απόσβεση.

Παράδειγμα 4

Μια μάζα M, συνδεδεμένη στο άκρο ενός ελατηρίου σταθεράς k, κινείται κατά μήκος του άξονα των x. Στη μάζα ασκείται επίσης μια δύναμη τριβής ανάλογη της ταχύτητάς της, $-b\dot{x}$. Να βρεθεί η λύση για τη μετατόπιση της μάζας $x(t)$.

Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, η εξίσωση κίνησης της μάζας είναι:

$$M\ddot{x} = -b\dot{x} - kx \ , \qquad \text{ή} \qquad \ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \ , \qquad \omega_0^2 \equiv \frac{k}{M} \quad \tau \equiv \frac{M}{b} \ . \qquad (13.17)$$

Υποθέτοντας λύσεις της μορφής $y = e^{st}$, βρίσκουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση:

$$s^2 + \frac{1}{\tau}s + \omega_0^2 = 0 \ , \qquad \text{η οποία έχει ως ρίζες τις} \qquad s_{1,2} = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{-\omega_0^2 + \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2} \ .$$

Ορίζουμε τα μεγέθη: $\beta \equiv \dfrac{1}{2\tau}$ και $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, (13.18)

οπότε οι δύο ρίζες γράφονται ως: $s_1 = -\beta - i\omega'$ και $s_2 = -\beta + i\omega'$

Αν $\omega_0 \neq \dfrac{1}{2\tau}$, η γενική λύση είναι η

$$x(t) = c_1 e^{-t/2\tau} e^{-i\omega' t} + c_2 e^{-t/2\tau} e^{i\omega' t} \ . \qquad (13.19)$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Όιλερ, γράφουμε τη γενική λύση στη μορφή

$$x(t) = e^{-t/2\tau}\left(A\sin\omega' t + B\cos\omega' t\right) \ , \qquad (13.20)$$

ή στην ισοδύναμη μορφή

$$x(t) = a\, e^{-t/2\tau}\sin(\omega' t + \phi) \ . \qquad (13.21)$$

Οι σταθερές A, B, ή a, ϕ, προσδιορίζονται από τις αρχικές ή άλλες συνθήκες του προβλήματος.

Αναγνωρίζουμε τις εξής ειδικές περιπτώσεις:

1. Μηδενική απόσβεση $(\tau \to \infty)$

Η λύση ανάγεται στην $x(t) = a\sin(\omega_0 t + \phi)$, της *αμείωτης ταλάντωσης*.

2. *Υποαπόσβεση* $(2\omega_0\tau > 1)$

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι μιγαδικές και η λύση έχει τη μορφή

$$x(t) = a\,e^{-t/2\tau}\sin(\omega' t + \phi)\ . \qquad (13.22)$$

Η μάζα εκτελεί ταλαντώσεις με γωνιακή συχνότητα ω', και πλάτος $a\,e^{-t/2\tau}$ που φθίνει εκθετικά με το χρόνο.

Στην περίπτωση της *ασθενούς απόσβεσης,* $\omega_0\tau >> 1$, η γωνιακή συχνότητα είναι $\omega' \approx \omega_0$, και

$$x(t) \approx a\,e^{-t/2\tau}\sin(\omega_0 t + \phi)\,. \qquad (13.23)$$

3. *Κρίσιμη απόσβεση* $(2\omega_0\tau = 1)$

Στην περίπτωση αυτή η χαρακτηριστική εξίσωση γίνεται $s^2 + 2\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$, και έχει τη διπλή ρίζα $s = -\omega_0 = -\dfrac{1}{2\tau}$. Η λύση της διαφορικής εξίσωσης που αντιστοιχεί στη ρίζα αυτή είναι η $x_1(t) = C\,e^{-t/2\tau}$. Αυτή όμως δεν μπορεί να είναι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης, η οποία είναι δεύτερης τάξης και επομένως έχει γενική λύση με δύο ανεξάρτητες σταθερές. Αποδεικνύεται, και ελέγχεται με αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση, ότι η $x_2(t) = D\,t\,e^{-t/2\tau}$ είναι επίσης λύση στην ειδική αυτή περίπτωση. Επομένως, η γενική λύση είναι:

$$x(t) = (C + Dt)\,e^{-t/2\tau}\,. \qquad (13.24)$$

Αυτή είναι μια μη ταλαντωτική κίνηση. Αν η αρχική μετατόπιση είναι x_0 και η αρχική ταχύτητα υ_0, η λύση εκφράζεται ως

$$x(t) = \left[x_0 + \left(\upsilon_0 + x_0/2\tau\right)t\,\right]e^{-t/2\tau}\,. \qquad (13.25)$$

Η απόσταση $|x|$ της μάζας από το σημείο $x = 0$ γίνεται μέγιστη τη χρονική στιγμή

$t_m = \dfrac{2\tau}{1 + x_0/2\upsilon_0\tau}$. Μετά, η μετατόπιση τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν.

4. *Υπεραπόσβεση* $(2\omega_0\tau < 1)$

Οι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι πραγματικές: $s_{1,2} = -\dfrac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\left(\dfrac{1}{2\tau}\right)^2 - \omega_0^2}$.

Ορίζουμε $\alpha = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2\tau}\right)^2 - \omega_0^2}$ και γράφουμε τη γενική λύση ως

$$x(t) = e^{-t/2\tau}\left(Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}\right)\,. \qquad (13.26)$$

Η κίνηση είναι μη ταλαντωτική.

13.4.3 Η εξίσωση $y'' + p_1 y' + p_0 y = A\sin\omega t$

Πριν προχωρήσουμε στη μελέτη αυτής της διαφορικής εξίσωσης, θα αποδείξουμε μια πολύ σημαντική αρχή, που ισχύει για όλες τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές, την

Αρχή της υπέρθεσης ή της επαλληλίας:

Αν η y_1 είναι μια λύση της εξίσωσης $y'' + p_1 y' + p_0 y = f_1(t)$

και η y_2 είναι μια λύση της εξίσωσης $y'' + p_1 y' + p_0 y = f_2(t)$,

τότε η $y = y_1 + y_2$ είναι μια λύση της εξίσωσης $y'' + p_1 y' + p_0 y = f_1(t) + f_2(t)$.

Απόδειξη:

Επειδή $y_1'' + p_1 y_1' + p_0 y_1 = f_1(t)$ και $y_2'' + p_1 y_2' + p_0 y_2 = f_2(t)$, προσθέτοντας έχουμε

$$(y_1'' + y_2'') + p_1(y_1' + y_1') + p_0(y_1 + y_2) = f_1(t) + f_2(t)$$

και επομένως η $y = y_1 + y_2$ είναι λύση της εξίσωσης $y'' + p_1 y' + p_0 y = f_1(t) + f_2(t)$.

Η εξίσωση $y'' + p_1 y' + p_0 y = f(t)$ είναι γνωστή στη θεωρία των ταλαντώσεων, και περιγράφει την κίνηση ενός αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση, ο οποίος υφίσταται εξωτερική διέγερση ανάλογη του $f(t)$. Αν η $y(t)$ είναι η γραμμική μετατόπιση μιας μάζας και t ο χρόνος, τότε η $f(t)$ ισούται με την εξωτερικά ασκούμενη δύναμη ανά μονάδα μάζας του ταλαντωτή.

Η περίπτωση της σταθερής διέγερσης f_0 δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον, αφού μια αλλαγή της μεταβλητής σε $z = y - f_0 / p_0$ ανάγει την εξίσωση στην ομογενή εξίσωση που ήδη εξετάσαμε.

Η χρονικά μεταβαλλόμενη διέγερση έχει επομένως ενδιαφέρον, και ιδιαίτερα η αρμονικά μεταβαλλόμενη, δηλαδή της μορφής $\sin\omega t$ ή $\cos\omega t$. Οι κύριοι λόγοι για τη σημασία των αρμονικά μεταβαλλόμενων διεγέρσεων είναι οι εξής:

1. Στα γραμμικά συστήματα, αν η διέγερση είναι αρμονική και η απόκριση θα είναι αρμονική.
2. Ένα αυθαίρετο περιοδικό σήμα διέγερσης, με περίοδο $T = 2\pi / \omega$, μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Φουριέ, δηλαδή σε σειρά άπειρων όρων της μορφής

   $$\tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos\omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + ... + b_1 \sin\omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + ... ,$$

   αρμονικά μεταβαλλόμενων, με συχνότητες που είναι ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας του διεγείροντος σήματος. Αν βρεθεί η απόκριση του συστήματος στην κάθε μια συνιστώσα του σήματος ξεχωριστά, τότε, σύμφωνα με την *αρχή της επαλληλίας*, η ολική απόκριση του συστήματος θα ισούται με το άθροισμα των επιμέρους αποκρίσεων.

   Αν λοιπόν γνωρίζουμε την απόκριση ενός γραμμικού συστήματος σε ημιτονικά ή συνημιτονικά σήματα, γνωρίζουμε και την απόκρισή του σε κάθε περιοδικό σήμα, και στο όριο που η περίοδος αυτού του σήματος τείνει στο άπειρο, σε κάθε σήμα, περιοδικό ή μη.

Θα προχωρήσουμε τώρα στη λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές $y'' + p_1 y' + p_0 y = A\sin\omega t$, με αναφορά στον μηχανικό αρμονικό ταλαντωτή με απόσβεση ο οποίος υφίσταται μια εξωτερικά ασκούμενη δύναμη ίση με $F_0 \sin\omega t$. Για το σύστημα της μάζας και του ελατηρίου, η εξίσωση κίνησης είναι:

$$M\,\ddot{x} = -b\,\dot{x} - kx + F_0 \sin\omega t \ , \tag{13.27}$$

ή

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2\, x = \frac{F_0}{M}\sin\omega t, \qquad \omega_0^2 \equiv \frac{k}{M} \quad \tau \equiv \frac{M}{b} \ . \tag{13.28}$$

Ας υποθέσουμε ότι, με οποιοδήποτε τρόπο, έχουμε βρει μια λύση της εξίσωσης, $x_{\text{E.O.}}$, η οποία δεν περιέχει αυθαίρετες σταθερές. Η λύση αυτή ονομάζεται *ειδικό ολοκλήρωμα* της διαφορικής εξίσωσης. Επομένως,

$$\ddot{x}_{\text{E.O.}} + \frac{1}{\tau}\dot{x}_{\text{E.O.}} + \omega_0^2\, x_{\text{E.O.}} = \frac{F_0}{M}\sin\omega t \tag{13.29}$$

Έστω τώρα ότι γράφουμε τη γενική λύση της εξίσωσης ως

$$x(t) = x_{\text{E.O.}} + x_{\Sigma.\Sigma.} \ . \tag{13.30}$$

Η $x_{\Sigma.\Sigma.}$ ονομάζεται *συμπληρωματική συνάρτηση*.

Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση, βρίσκουμε

$$\left(\ddot{x}_{\text{E.O.}} + \ddot{x}_{\Sigma.\Sigma.}\right) + \frac{1}{\tau}\left(\dot{x}_{\text{E.O.}} + \dot{x}_{\Sigma.\Sigma.}\right) + \omega_0^2\left(x_{\text{E.O.}} + x_{\Sigma.\Sigma.}\right) = \frac{F_0}{M}\sin\omega t \ , \tag{13.31}$$

η οποία, σε συνδυασμό με την $\ddot{x}_{\text{E.O.}}+\frac{1}{\tau}\dot{x}_{\text{E.O.}}+\omega_0^2\,x_{\text{E.O.}}=\frac{F_0}{M}\sin\omega t$, δίνει:

$$\ddot{x}_{\Sigma.\Sigma.}+\frac{1}{\tau}\dot{x}_{\Sigma.\Sigma.}+\omega_0^2\,x_{\Sigma.\Sigma.}=0\ . \tag{13.32}$$

Η $x_{\Sigma.\Sigma.}$ είναι η λύση της ομογενούς εξίσωσης, η οποία βρέθηκε στην Ενότητα 13.4.2. Η γενική λύση είναι επομένως

$$x(t)=x_{\text{E.O.}}+x_{\Sigma.\Sigma.}=x_{\text{E.O.}}+e^{-\beta t}\left(A\sin\omega' t+B\cos\omega' t\right)\ . \tag{13.33}$$

Η λύση αυτή ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση, και έχει δύο αυθαίρετες σταθερές. Είναι επομένως η γενική λύση.

Συνοψίζοντας, η μέθοδος λύσης της Δ.Ε. $y''+p_1y'+p_0y=f_1(t)$ είναι η εξής:

Η γενική λύση της Δ.Ε. είναι ίση με το άθροισμα ενός ειδικού ολοκληρώματος της εξίσωσης και της συμπληρωματικής συνάρτησης, δηλαδή της γενικής λύσης της ομογενούς εξίσωσης.

13.4.3.1 Η εύρεση του ειδικού ολοκληρώματος

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι εύρεσης ειδικών ολοκληρωμάτων. Θα εξετάσουμε εδώ μόνο την περίπτωση στην οποία είναι $f(t)=\frac{F_0}{M}\sin\omega t$.

Δοκιμάζουμε τη μορφή

$$x_{\text{E.O.}}=E_1\sin\omega t+E_2\cos\omega t,\qquad E_1,\ E_2=\text{σταθερές}. \tag{13.34}$$

Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση $\ddot{x}_{\text{E.O.}}+\frac{1}{\tau}\dot{x}_{\text{E.O.}}+\omega_0^2\,x_{\text{E.O.}}=\frac{F_0}{M}\sin\omega t$,

βρίσκουμε τη συνθήκη

$$-\omega^2\left(E_1\sin\omega t+E_2\cos\omega t\right)+\frac{\omega}{\tau}\left(E_1\cos\omega t-E_2\sin\omega t\right)+\omega_0^2\left(E_1\sin\omega t+E_2\cos\omega t\right)=\frac{F_0}{M}\sin\omega t$$

ή

$$\left(-\omega^2E_1-\frac{\omega}{\tau}E_2+\omega_0^2E_1-\frac{F_0}{M}\right)\sin\omega t+\left(-\omega^2E_2+\frac{\omega}{\tau}E_1+\omega_0^2E_2\right)\cos\omega t=0\ . \tag{13.35}$$

Η συνθήκη αυτή πρέπει να ισχύει για κάθε τιμή του t. Επομένως οι συντελεστές των $\sin\omega t$ και $\cos\omega t$ πρέπει να είναι ίσοι με μηδέν. Έτσι παίρνουμε

$$-\omega^2E_1-\frac{\omega}{\tau}E_2+\omega_0^2E_1-\frac{F_0}{M}=0\qquad\text{και}\qquad-\omega^2E_2+\frac{\omega}{\tau}E_1+\omega_0^2E_2=0\,. \tag{13.36}$$

Λύνοντας για τα E_1 και E_2, έχουμε για το ειδικό ολοκλήρωμα,

$$x_{\text{E.O.}}=\left(\frac{F_0}{M}\right)\left\{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}\sin\omega t-\frac{\left(\frac{\omega}{\tau}\right)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}\cos\omega t\right\}\ . \tag{13.37}$$

Η λύση αυτή γράφεται και ως

$$x_{\text{E.O.}}=\frac{\left(\frac{F_0}{M}\right)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}}\sin(\omega t-\phi)\qquad\text{όπου}\qquad\tan\phi=\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2-\omega^2}\ , \tag{13.38}$$

και η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$x(t) = e^{-t/2\tau}\left(A\sin\omega' t + B\cos\omega' t\right) + \frac{\left(\dfrac{F_0}{M}\right)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \left(\dfrac{\omega}{\tau}\right)^2}}\sin(\omega t - \phi) \ . \tag{13.39}$$

Ο πρώτος όρος, ο οποίος φθίνει εκθετικά με το χρόνο και τελικά γίνεται αμελητέος, περιγράφει τη *μεταβατική κατάσταση* του συστήματος. Εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες του συστήματος. Ο δεύτερος, ο οποίος απομένει όταν μια δυναμική ισορροπία έχει αποκατασταθεί, περιγράφει τη *μόνιμη κατάσταση*. Η μόνιμη κατάσταση δεν εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Η μεταβατική κατάσταση περιγράφεται από τη συμπληρωματική συνάρτηση και η μόνιμη κατάσταση από το ειδικό ολοκλήρωμα.

13.4.3.2 Η χρήση μιγαδικών συναρτήσεων στην εύρεση του ειδικού ολοκληρώματος

Η εύρεση ειδικού ολοκληρώματος (Ε.Ο.) της Δ.Ε. $\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{M}\sin\omega t$ μπορεί να γίνει ευκολότερη, και να συνδυαστεί με την εύρεση Ε.Ο. της Δ.Ε. $\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{M}\cos\omega t$, με τη χρήση μιγαδικών συναρτήσεων. Έτσι, γράφουμε

$$\ddot{x}_R + \frac{1}{\tau}\dot{x}_R + \omega_0^2 x_R = \frac{F_0}{M}\cos\omega t \qquad \text{και} \qquad \ddot{x}_I + \frac{1}{\tau}\dot{x}_I + \omega_0^2 x_I = \frac{F_0}{M}\sin\omega t \tag{13.40}$$

και ορίζουμε τη μιγαδική συνάρτηση $x_M = x_R + i\,x_I$. Πολλαπλασιάζοντας επί i τη διαφορική εξίσωση για την x_I και προσθέτοντάς την σε αυτήν για το x_R, βρίσκουμε

$$\ddot{x}_M + \frac{1}{\tau}\dot{x}_M + \omega_0^2 x_M = \frac{F_0}{M}e^{i\omega t} \ . \tag{13.41}$$

Έτσι, αν βρούμε το Ε.Ο. αυτής της διαφορικής εξίσωσης, το πραγματικό του μέρος θα είναι το Ε.Ο. για τη Δ.Ε. με το $\cos\omega t$ και το φανταστικό του μέρος θα είναι το Ε.Ο. για τη Δ.Ε. με το $\sin\omega t$. Το πλεονέκτημα είναι ότι οι πράξεις με εκθετικά είναι ευκολότερες από αυτές με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Δοκιμάζουμε τη συνάρτηση $x_M = Ae^{i\omega t}$ για Ε.Ο. της τελευταίας αυτής Δ.Ε., όπου το A ενδεχομένως να είναι μιγαδικό. Αντικαθιστώντας στη Δ.Ε. (13.41), βρίσκουμε, μετά την απλοποίηση του κοινού παράγοντα $e^{i\omega t}$,

$$-\omega^2 A + i\frac{\omega}{\tau}A + \omega_0^2 A = \frac{F_0}{M} \qquad \text{ή} \qquad A = \frac{\left(\dfrac{F_0}{M}\right)}{-\omega^2 + i\dfrac{\omega}{\tau} + \omega_0^2} \qquad A = \left(\frac{F_0}{M}\right)\frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\dfrac{\omega}{\tau}}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{\omega}{\tau}\right)^2} \ .$$

Γράφοντας, $A = |A|e^{-i\phi}$,

Έχουμε

$$|A| = \frac{\left(\dfrac{F_0}{M}\right)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \left(\dfrac{\omega}{\tau}\right)^2}} \qquad \text{και} \qquad \tan\phi = \frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{13.42}$$

Επομένως είναι

$$x_M = Ae^{i\omega t} = |A|\,e^{-i\phi}e^{i\omega t} = |A|\,e^{i(\omega t - \phi)} , \tag{13.43}$$

το φανταστικό μέρος του οποίου μας δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με την ενότητα 13.4.3.1.

Μερικές κοινές εξισώσεις κίνησης και οι γενικές λύσεις τους

Εξίσωση	**_Λύση_**
$\ddot{x} = 0$	$x = x_0 + \upsilon_0 t$
$\ddot{x} = \dfrac{F_0}{M}$	$x = x_0 + \upsilon_0 t + \dfrac{F_0}{2M} t^2$
$\ddot{x} = \dfrac{F_0}{M}\sin\omega t$	$x = x_0 + \left(\upsilon_0 + \dfrac{F_0}{\omega M}\right) t - \dfrac{F_0}{\omega^2 M}\sin\omega t$
$\ddot{x} + \dfrac{1}{\tau}\dot{x} = 0$	$x = x_0 + \upsilon_0 \tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$
$\ddot{x} + \dfrac{1}{\tau}\dot{x} = \dfrac{F_0}{M}$	$x = x_0 + \tau\left(\upsilon_0 - \dfrac{\tau F_0}{M}\right)\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + \dfrac{\tau F_0}{M} t$
$\ddot{x} + \dfrac{1}{\tau}\dot{x} = \dfrac{F_0}{M}\sin\omega t$	$x = (x_0 + C) + (\upsilon_0 \tau + \omega^2 \tau^2 C)\left(1 - e^{-t/\tau}\right) - C\,(\omega\tau\sin\omega t + \cos\omega t)$
$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0$	$x = x_0 \cos\omega_0 t + \dfrac{\upsilon_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$
$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = \dfrac{F_0}{M}$	$x = \dfrac{F_0}{k} + \left(x_0 - \dfrac{F_0}{k}\right)\cos\omega_0 t + \dfrac{\upsilon_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$
$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = \dfrac{F_0}{M}\sin\omega t$	$x = x_0 \cos\omega_0 t + \dfrac{1}{\omega_0}\left(\upsilon_0 + \dfrac{\omega F_0 / M}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)\sin\omega_0 t + \dfrac{F_0 / M}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\omega t$
$\ddot{x} + \dfrac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2\, x = 0$	$x = \left(x_0 \cos\,\omega' t + \dfrac{1}{\omega'}\left(\upsilon_0 + \dfrac{x_0}{2\tau}\right)\sin\omega' t\right) e^{-t/2\tau}$
$\ddot{x} + \dfrac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2\, x = \dfrac{F_0}{M}$	$x = \dfrac{F_0}{k} + \left(\left(x_0 - \dfrac{F_0}{k}\right)\cos\,\omega' t + \dfrac{1}{\omega'}\left(\upsilon_0 + \dfrac{x_0}{2\tau} - \dfrac{F_0}{2k\tau}\right)\sin\omega' t\right) e^{-t/2\tau}$
$\ddot{x} + \dfrac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2\, x = \dfrac{F_0}{M}\sin\omega t$	$x = \left((x_0 - B)\cos\,\omega' t + \dfrac{1}{\omega'}\left(\upsilon_0 - \omega A + \dfrac{x_0 - B}{2\tau}\right)\sin\omega' t\right) e^{-t/2\tau} +$ $+ A\sin\omega t - B\cos\,\omega t$

$x_0 =$ αρχική μετατόπιση, $\upsilon_0 =$ αρχική ταχύτητα

$$M, F_0, k, b = \text{σταθερές} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} \qquad \tau = \frac{M}{b} \qquad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2}$$

$$A = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\,\dfrac{F_0}{M}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\dfrac{\omega}{\tau}\right)^2} \qquad B = \frac{\left(\dfrac{\omega}{\tau}\right)\dfrac{F_0}{M}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\dfrac{\omega}{\tau}\right)^2} \qquad C = \frac{\dfrac{\tau}{\omega}\dfrac{F_0}{M}}{1 + \omega^2 \tau^2}$$